Ad-Soyad :
Numara :

30.12.2021

2021-2022 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 101 ANALİZ I (B) DERSİ II. QUİZ SINAVI SORULARI

$(x_n)=\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)$ dizisinin yakınsaklığını

1. Yakınsak diziler için verilen hesap kurallarını kullanarak hesaplayınız.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$ (Bölümün limiti)

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$$ (farkın ve toplamın limiti)

$$=\frac{2-0}{2+0}$$ (Sabitin limiti ve $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ olması)

$$=1$$

2. Limit tanımını kullanarak hesaplayınız.

$\forall\varepsilon>0$ sayısı verilsin. Bir $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ sayısını $N_\varepsilon>\dfrac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}$ olacak şekilde seçelim. Böylece her $n\geq N_\varepsilon$ olduğunda

$$|x_n-1|=\left|\frac{2n-1}{2n+1}-1\right|=\left|\frac{-2}{2n+1}\right|$$

$$=\frac{2}{2n+1}\leq\frac{2}{2N_\varepsilon+1}<\varepsilon$$

$$\left(\begin{aligned} n\geq N_\varepsilon &\Rightarrow 2n+1\geq 2N_\varepsilon+1\\ &\Rightarrow \frac{1}{2n+1}\leq\frac{1}{2N_\varepsilon+1}\\ &\Rightarrow \frac{2}{2n+1}\leq\frac{2}{2N_\varepsilon+1}\end{aligned}\right)$$

olup, verilen dizi yakınsaktır ve $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)=1$ bulunur.

3. Monotonluk ile ilgili sonuçları kullanarak hesaplayınız.

Artan (azalan) ve üstten sınırlı (alttan sınırlı) olan (x_n) dizisi yakınsaktır.

Buna göre

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+1}{2n+3} - \frac{2n-1}{2n+1}$$

$$= \frac{4}{(2n+1)(2n+3)} > 0$$

olduğundan $x_{n+1} > x_n$ olup, (x_n) artandır.

Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 < 2n-1 < 2n+1 \Rightarrow \frac{2n-1}{2n+1} < 1$$

olduğundan, (x_n) dizisi üstten sınırlıdır.

(x_n) dizisi artan ve üstten sınırlı olduğundan YAKINSAKTIR.

4. Cauchy yakınsaklık teoremini kullanarak hesaplayınız.

$\mathbb{R}$ de bir (x_n) dizisinin yakınsak olması için $\Leftrightarrow$ Cauchy dizisi olmasıdır.

Buna göre; (x_n) bir Cauchy dizisi midir? Bakalım.

$$(x_n) = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right) = \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)$$

$\forall \varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısını $n_0 > \frac{4-\varepsilon}{2\varepsilon}$ olacak şekilde seçelim. $\forall m, n \geq n_0$ için

$$|x_m - x_n| = \left|\cancel{1} - \frac{2}{2m+1} - \cancel{1} + \frac{2}{2n+1}\right|$$

$$\leq \left|\frac{-2}{2m+1}\right| + \left|\frac{2}{2n+1}\right|$$

$$= \frac{2}{2m+1} + \frac{2}{2n+1}$$

$m, n \geq n_0$ için

$$\left.\begin{array}{l} 2m+1 \geq 2n_0+1 \\ 2n+1 \geq 2n_0+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{2}{2m+1} \leq \frac{2}{2n_0+1} \\ \frac{2}{2n+1} \leq \frac{2}{2n_0+1} \end{array}$$

olup, buradan

$$|x_m - x_n| \leq \frac{2}{2n_0+1} + \frac{2}{2n_0+1} = \frac{4}{2n_0+1} < \varepsilon$$

bulunur. O halde (x_n) bir Cauchy dizisidir. $\Rightarrow$ YAKINSAKTIR.

Not: Süre 45 dakikadır. *Başarılar Dilerim...*